

Aula 7

Teorema da Divergência

(ou de Gauss-Ostrogradsky)

Teorema: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, com uma fronteira $\partial\Omega$ seccionalmente constituída por uma variedade diferenciável de dimensão $n - 1$ (variedade com cantos).

Seja $\mathbf{F} : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, um campo vetorial de classe pelo menos C^1 . Então, tem-se

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV_n = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu dV_{n-1},$$

em que ν é a normal unitária exterior à fronteira de Ω .

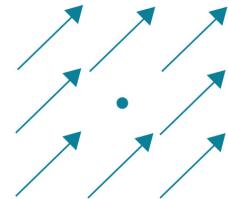
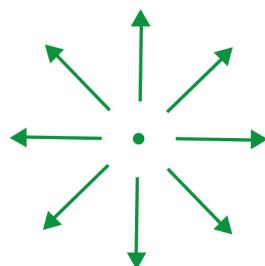
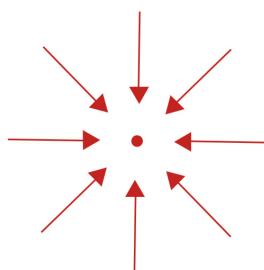
Significado da Divergência

Proposição: Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}_n(B_\varepsilon(x))} \int_{S_\varepsilon(x)} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS,$$

em que $B_\varepsilon(x)$ é a bola de raio ε centrada em x e $S_\varepsilon(x) = \partial B_\varepsilon(x)$ a correspondente esfera que constitui a sua fronteira.

$$\operatorname{div} \mathbf{F} < 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{F} > 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$



Variedades com Bordo

Definição: Diz-se que $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma **variedade diferenciável de dimensão $m \leq n$ com bordo** (mergulhada em \mathbb{R}^n) e de classe C^k se, para qualquer ponto $p \in M$, existe uma bola $B(p)$ centrada em p tal que o conjunto dos pontos de M na bola, ou seja o conjunto $M \cap B(p)$, pode ser descrito de uma das duas seguintes formas:

- **p interior à variedade:** Como imagem duma parametrização dada por uma função injetiva $g : B_r(0) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , definida numa bola $B_r(0) \subset \mathbb{R}^m$, centrada na origem,

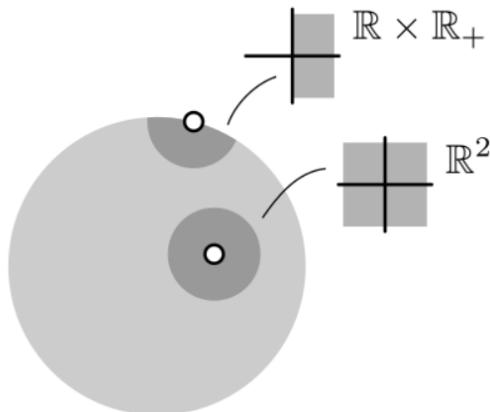
$$B_r(0) = \{(u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m : u_1^2 + \dots + u_m^2 < r^2\},$$

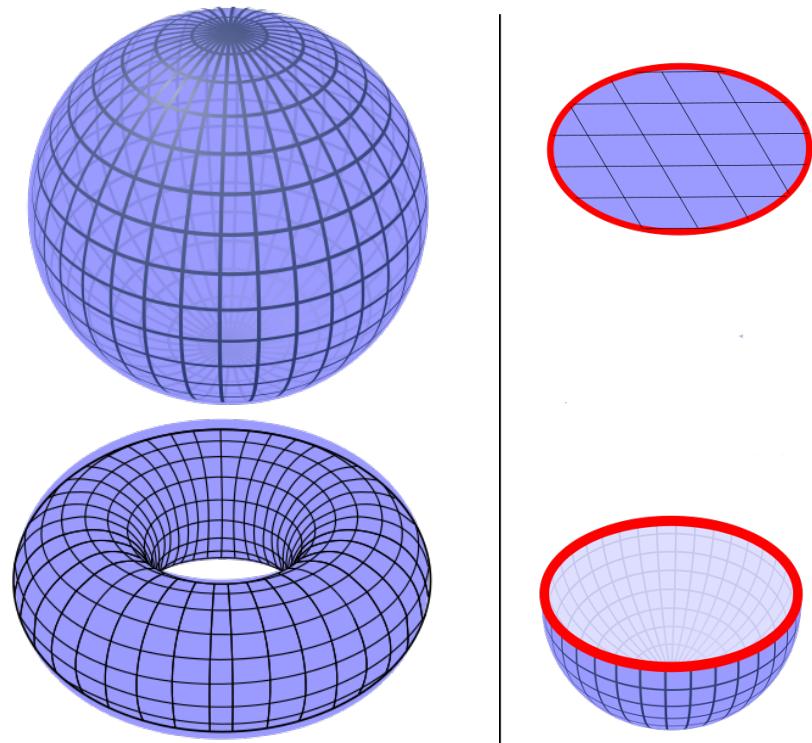
com inversa contínua $g^{-1} : g(B_r(0)) \rightarrow B_r(0)$ e $g(0) = p$.

- **p no bordo da variedade:** Como imagem duma parametrização dada por uma função injetiva $g : B_r^+(0) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , definida numa meia-bola $B_r^+(0) \subset \mathbb{R}^m$, centrada na origem,

$$\begin{aligned} B_r^+(0) = \{(u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m : u_1^2 + \dots + u_m^2 < r^2\} \\ \cap \{u^1 \geq 0\}, \end{aligned}$$

com inversa contínua $g^{-1} : g(B_r^+(0)) \rightarrow B_r^+(0)$ e $g(0) = p$.





Sem Bordo vs Com Bordo

Proposição: O conjunto dos pontos interiores duma variedade com bordo de dimensão m formam uma variedade sem bordo de dimensão m . O conjunto dos pontos do bordo de uma variedade com bordo de dimensão m formam uma variedade sem bordo de dimensão $m - 1$.

Teorema de Stokes

Teorema: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, isto é, uma variedade de dimensão 2, limitada, orientável e com bordo ∂S seccionalmente regular.

Seja $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe pelo menos C^1 no aberto Ω , com $S \cup \partial S \subset \Omega$. Então, tem-se

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\gamma,$$

em que γ é um caminho que percorre ∂S com orientação compatível com a de ν (regra da mão direita).

